

Contrôle Final

Partie II

I. Exercice 3

Trouver la fonction $f(x)$ dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f](s)$ vaut $\frac{1}{1-s^2}$

1 pt

On décompose :

$$\frac{1}{1-s^2} = \frac{-1/2}{s-1} + \frac{1/2}{s+1}.$$

En revenant au formulaire, cela donne :

$$f(t) = (e^{-t} - e^t)/2, \quad \forall t \geq 0. \quad (1)$$

Erreurs fréquentes :

- signes :

$$\frac{1}{1-s^2} \neq \frac{1}{s^2-1}, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1} \neq \frac{1}{1-s}.$$

- Le tableau dans le formulaire fournit

$$\mathcal{L}[\sin(t)](s) = \frac{1}{s^2+1} \neq \frac{1}{s^2-1}$$

- $\mathcal{L}[f](s)$ défini pour $s \in \mathbb{R}$

Trouver la fonction $f(x)$ dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f](s)$ vaut $\frac{1}{s(1-s^2)}$

2 pt

On décompose :

$$\frac{1}{s(1-s^2)} = \frac{1}{s} + \frac{-1/2}{s-1} + \frac{-1/2}{s+1}.$$

En revenant au formulaire, cela donne :

$$f(t) = 1 - (e^{-t} + e^t)/2, \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Erreurs fréquentes :

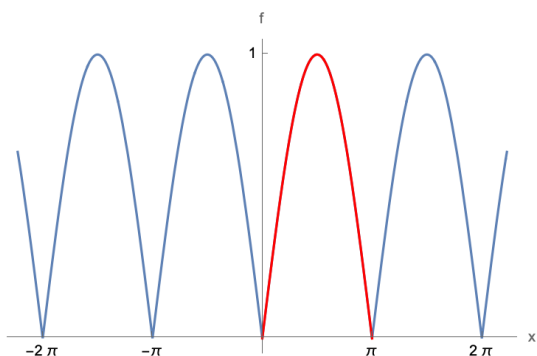
$$\mathcal{L}[fg](s) \neq \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s), \quad \text{par contre :} \quad \mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s)$$

II. Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction **paire** et 2π -périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$. On admet qu'elle est C^1 par morceaux.

1) Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

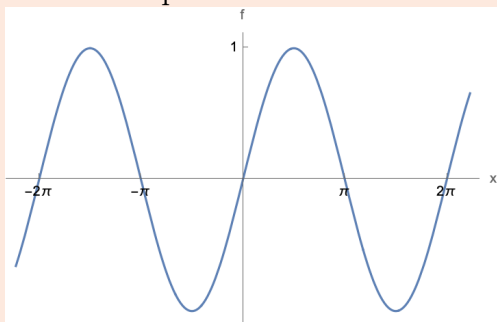
1 pt



Points clés

- $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$ (partie rouge)
- f paire (symétrique par rapport à l'axe vertical)
- 2π -périodique
- $f(\pi/2) = 1$ (valeur max.)

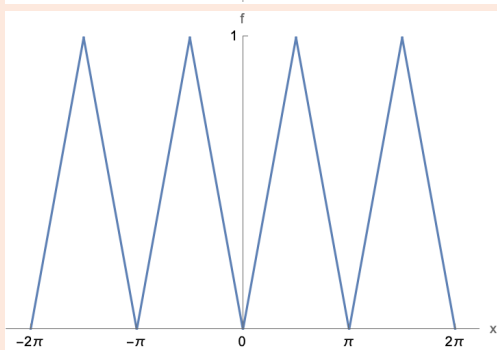
Erreurs fréquentes :



Points clés

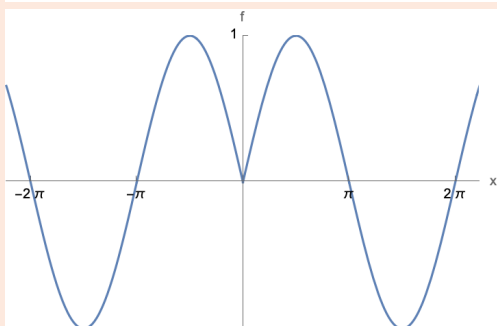
- $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$
- ~~f paire~~
- 2π -périodique

En fait, il s'agit de la fonction $f(x) = \sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.



Points clés

- ~~$f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$~~
- f paire
- 2π -périodique



Points clés

- $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$
- f paire
- ~~2π -périodique~~

2) Déterminer la série de Fourier Sf de f .

2.5 pt

La série de Fourier s'écrit

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) . \quad (3)$$

La fonction est paire donc tous les b_n sont nuls. D'autre part, pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx \quad (4)$$

3 méthodes pour calculer l'intégrale qui aboutissent au même résultat :

- **Méthode 1** : On utilise l'identité trigonométrique

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \quad (5)$$

pour trouver

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx & \text{pour } n = 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin((1+n)x) + \sin(1-n)x] dx & \text{pour } n \neq 1 \end{cases} \quad (6)$$

On obtient

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} [-\cos(2x)]_0^{\pi} = 0 . \quad (7)$$

et pour $n \neq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((1+n)x)}{n+1} + \frac{\cos((1-n)x)}{1-n} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{1-n} \right) \\ &= \frac{1 + (-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n} \right) \\ &= \frac{2(1 + (-1)^n)}{\pi(1-n^2)} \end{aligned} \quad (8)$$

On a alors

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impaire} \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ paire} \end{cases} \quad (9)$$

- **Méthode 2** : Integration par partie (IPP) :

On considère séparément

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} [-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} , \quad (10)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = \frac{1}{2\pi} [\sin(2x)]_0^{\pi} = 0 . \quad (11)$$

Pour $n > 1$ on rappelle

$$\int u v' dx = uv - \int u'v dx. \quad (12)$$

pour calculer

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(nx) dx \quad \text{on mets} \quad \begin{cases} u(x) = \sin(x), \\ v'(x) = \cos(nx) \text{ avec } v(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \end{cases} \quad (13)$$

tels que

$$a_n = \overbrace{\frac{2}{\pi} \left[\sin(x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi}^{=0} - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) dx. \quad (14)$$

Pour l'intégrale restant on fait une deuxième IPP

$$a_n = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) dx \quad \text{on mets} \quad \begin{cases} u(x) = \cos(x), \\ v'(x) = \sin(nx) \text{ avec } v(x) = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{cases} \quad (15)$$

tels que

$$a_n = \overbrace{\frac{2}{\pi n} \left[\cos(x) \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi}^{=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^{n+1}-1)} + \overbrace{\frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi \sin(x) \cos(nx) dx}^{=\frac{a_n}{n^2}}. \quad (16)$$

On obtient donc

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) a_n = -\frac{2((-1)^n + 1)}{\pi n^2} \implies a_n = -\frac{2((-1)^n + 1)}{\pi(n^2 - 1)}. \quad (17)$$

On a alors

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impaire} \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ paire} \end{cases} \quad (18)$$

Remarque : pour $n = 1$, (17) vaut que $0 = 0$ qui ne permet pas de calculer a_1 . Donc il faut (11) pour calculer separement.

- **Méthode 3 :** on utilise

$$\sin(a) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}, \quad \cos(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}, \quad (19)$$

pour calculer

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4i\pi} \int_0^\pi (e^{ix} - e^{-ix}) (e^{inx} + e^{-inx}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi [e^{i(1+n)x} + e^{i(1-n)x} - e^{-i(1-n)x} - e^{-i(1+n)x}] \end{aligned} \quad (20)$$

Il faut distinguer

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi [e^{2ix} - e^{-2ix}] = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{e^{2ix}}{2i} - \frac{e^{-2ix}}{2i} \right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1-1}{2i} - \frac{1-1}{2i} \right) = 0. \quad (21)$$

et pour $n \neq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{e^{i(1+n)x}}{i(1+n)} + \frac{e^{i(1-n)x}}{i(1-n)} + \frac{e^{-i(1-n)x}}{i(1-n)} + \frac{e^{-i(1+n)x}}{i(1+n)} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{(-1)^{1+n} - 1}{1+n} + \frac{(-1)^{1-n} - 1}{1-n} + \frac{(-1)^{1-n} - 1}{1-n} + \frac{(-1)^{1+n} - 1}{1+n} \right) \\ &= \frac{1 + (-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right) \\ &= \frac{2(1 + (-1)^n)}{\pi(1 - n^2)} \end{aligned} \quad (22)$$

On a alors

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impaire} \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ paire} \end{cases} \quad (23)$$

Par ces trois méthodes, on trouve donc

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ pair} \geq 2} \frac{\cos(nx)}{n^2 - 1}. \quad (24)$$

Si on pose pour l'index de sommation

$$n = 2p + 2 \quad \text{avec} \quad p \geq 0 \quad (25)$$

tels que

$$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = (2p + 1)(2p + 3) \quad (26)$$

on obtient

$$Sf(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+2)x)}{(2p+1)(2p+3)}. \quad (27)$$

Remarque : On a concretement

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} [-\cos(x)]_0^\pi = \frac{4}{\pi}. \quad (28)$$

Erreurs fréquentes (en dehors signes, facteurs etc.) :

- définition :

$$a_n \neq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(nx), \quad \text{par contre} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx),$$

On a $f(x) = -\sin(x)$ pour $x \in [-\pi, 0]$.

-

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = -[\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

3) Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ? Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$? 1 pt

La fonction f est C^1 par morceaux, donc Sf est partout convergente. De plus f est continue. Donc Sf est partout convergente et vaut partout f .

Théorème 2 de Jordan-Dirichlet (Convergence normale) CM3 p.38

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique. Supposons que f est de classe C^1 par morceaux sur tout intervalle fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier associée à f converge et on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)).$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est $f(x)$.

Enfin la convergence est normale (et donc uniforme) sur tout intervalle fermé et borné où la fonction f est continue. Si de plus f est continue sur \mathbb{R} , on a même

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad \text{converge}$$

Erreurs fréquentes : f n'est pas de classe C^1 , car elle n'est pas dérivable en $x = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Par contre, elle est de classe C^1 par morceaux.

4) En déduire la valeur de la somme de

1 pt

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)(2p+3)}.$$

En $x = 0$ (et avec $Sf(0) = f(0)$, ce qui est autorisé à la suite de la question précédente) on obtient pour (27) :

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)(2p+3)}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{1}{2}$$

Erreurs fréquentes : La forme (27) de Sf est requise.

5) Evaluer

1.5 pt

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2(2p+3)^2}.$$

En appliquant le théorème de Parseval on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{n \text{ pair} \geq 2} \frac{1}{(n^2 - 1)^2}$$

Or, d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} [x - \sin(2x)/2]_0^{\pi} = 1/2 \end{aligned}$$

et d'autre part en faisant le changement de variables $n = 2p + 2$:

$$\sum_{n \text{ pair} \geq 2} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2(2p+3)^2}.$$

Donc :

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2(2p+3)^2}$$

et du coup :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2(2p+3)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Erreurs fréquentes : Intégrale de $\int_0^\pi \sin^2(x) dx$